



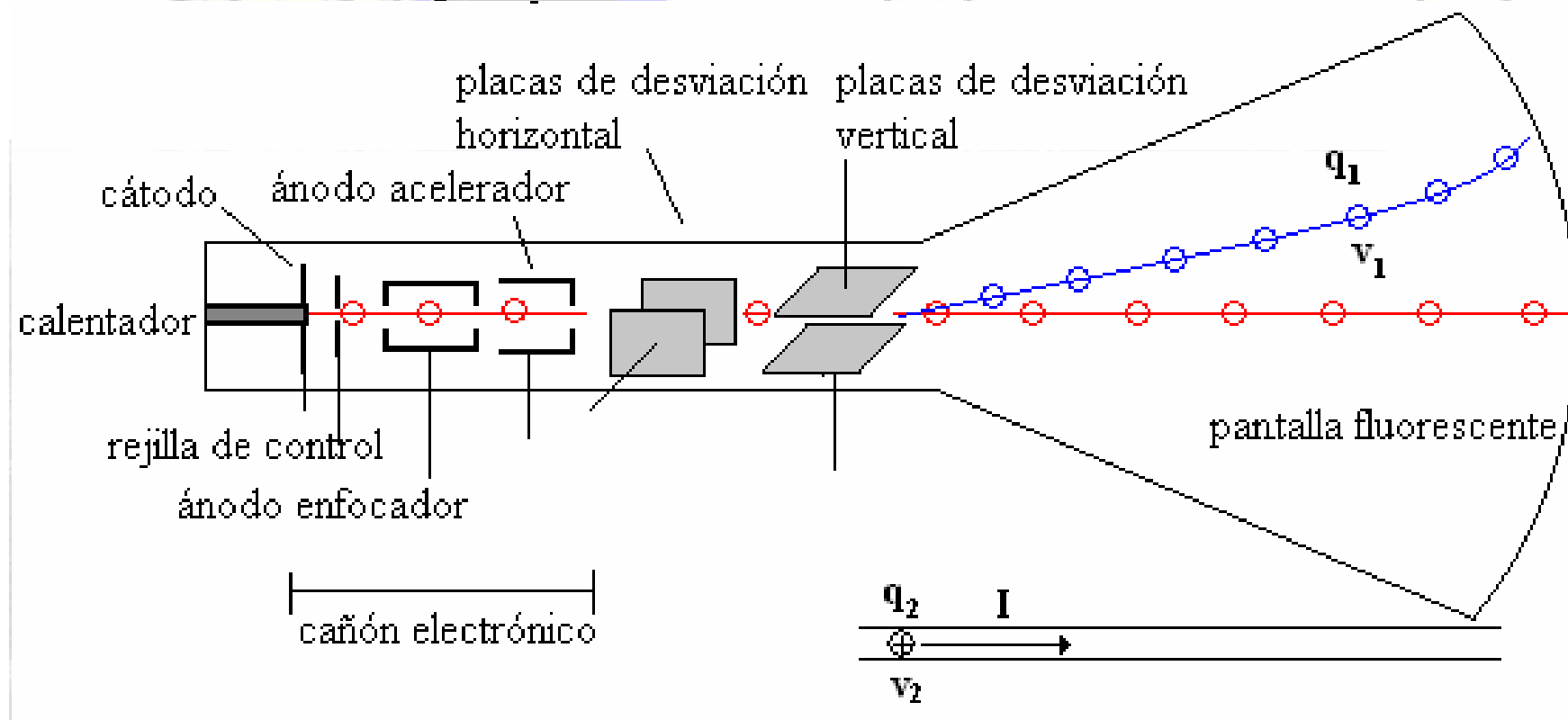
4.5 Ley de Biot-Savart.

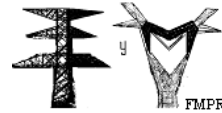
Otro experimento que puede realizarse para conocer más sobre el origen y comportamiento de las fuerzas de origen magnético es el mostrado en la siguiente figura. Consiste de un tubo de rayos catódicos, cuyo haz es colocado paralelamente a un conductor por el que circula corriente eléctrica. Nótese que el haz, aun al desviarse, se encuentra siempre formando un plano con el conductor



Ley de Biot-Savart.

Tubo de rayos catódicos.





Ley de Biot-Savart.

La corriente convencional en el conductor, produce una repulsión en los electrones de acuerdo con la regla de la mano izquierda provocando que estos describan una trayectoria curva como se muestra en la figura.



Ley de Biot-Savart.

- Las observaciones experimentales realizadas demuestran que la fuerza que actúa sobre la carga q_1 depende de:
- La magnitud de la carga 1 y su velocidad
- La velocidad de la carga 2 y el campo eléctrico que esta produce sobre la carga 1.

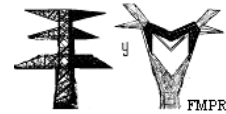
$$\vec{F}_{12} \propto q_1 \vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{E}_{12})$$



Ley de Biot-Savart.

Introduciendo la velocidad de la luz como la constante de proporcionalidad que satisface los requerimientos experimentales, se tiene:

$$\vec{F}_{12} = q_1 \vec{v}_1 \times \frac{1}{c^2} (\vec{v}_2 \times \vec{E}_{12})$$



Ley de Biot-Savart.

Comparando la ecuación anterior con:

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$



Ley de Biot-Savart.

Se tiene: $\vec{B} = \frac{1}{C^2} \vec{v} \times \vec{E}$

Se puede dar una definición formal de campo magnético:

“Como al desplazarse una carga q_2 también se desplaza el campo eléctrico que esta carga produce, es válido afirmar que un campo eléctrico que se desplaza (o que varía con el tiempo) produce un campo magnético”.



Ley de Biot-Savart.

LEY DE BIOT-SAVART.

Diferenciando la expresión que define el campo magnético, se tiene:

$$d\vec{B} = \frac{1}{C^2} \vec{v} \times d\vec{E}$$

La velocidad puede ser expresada

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$



Ley de Biot-Savart.

Y recordando que el campo eléctrico es:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

Sustituyendo las últimas expresiones en la primera

$$d\vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{\ell}}{dt} \times \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$



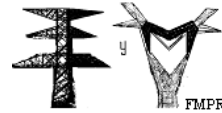
Ley de Biot-Savart.

Agrupando

$$d\vec{B} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^2} \frac{dq}{dt} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

Definiendo

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot c^2} = 1.255 \times 10^{-6} = 4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}} \right]$$

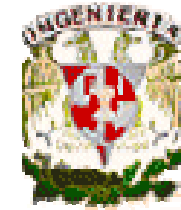
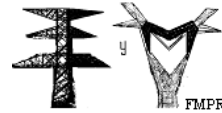


Ley de Biot-Savart.

y dado que el cociente carga entre tiempo es la corriente eléctrica, se tiene:

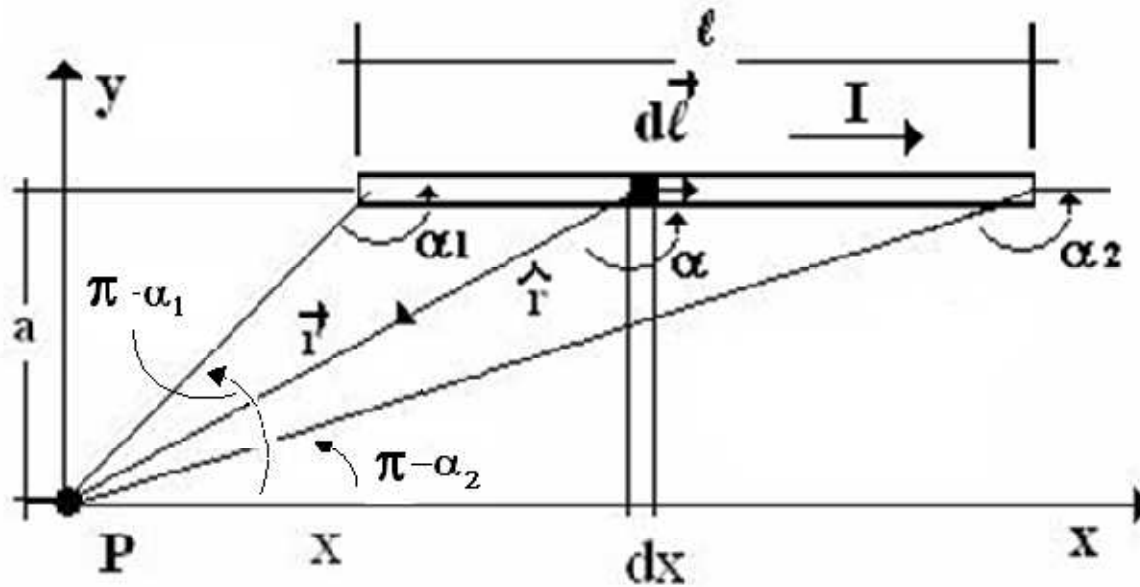
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$$

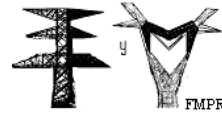
Expresión conocida como la ley de Biot-Savart, que permite cuantificar campos magnéticos producidos por corrientes eléctricas que fluyen por conductores con diferentes disposiciones geométricas.



Segmento de conductor recto.

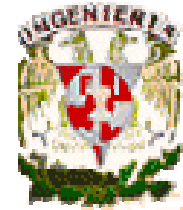
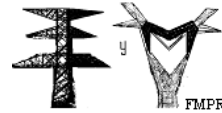
Conocer el campo magnético en un punto P, producido por un segmento de conductor recto por el cual fluye una corriente eléctrica I.





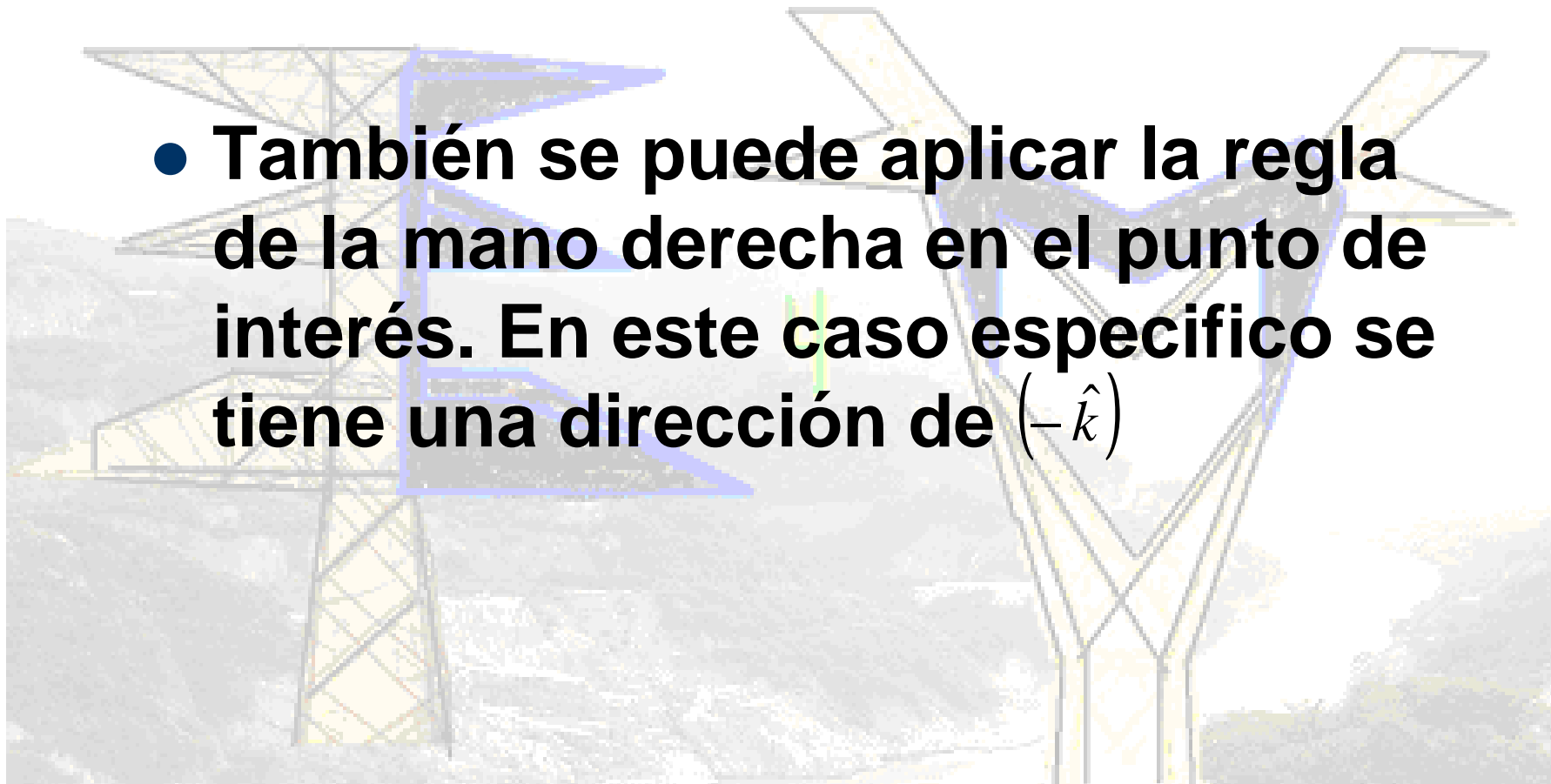
Segmento de conductor recto.

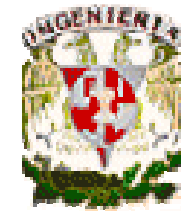
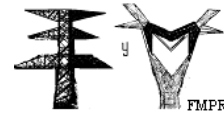
Si dividimos la longitud del conductor l en pequeños segmentos coincidentes con el sentido de la corriente, observamos que cada uno de estos segmentos multiplicados por la corriente I produce un campo magnético en el punto P , cuya dirección puede ser deducida al aplicar la regla de los productos vectorial indicado en la ley de Biot – Savart.



Segmento de conductor recto.

- También se puede aplicar la regla de la mano derecha en el punto de interés. En este caso específico se tiene una dirección de $(-\hat{k})$



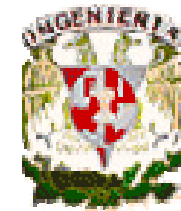


Segmento de conductor recto.

De la ley de Biot – Savart, se observa que para conocer el campo total en el punto P se requiere de integrar desde donde inicia el conductor hasta donde termina (desde X_1 hasta X_2 o desde α_1 hasta α_2).

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int dB \cdot (-\hat{k}) = B \cdot (-\hat{k})$$

$$B = \int \frac{\mu_0 \cdot I \, d\ell \cdot \text{sen} \cdot \alpha}{4\pi r^2}$$



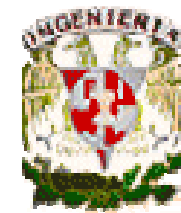
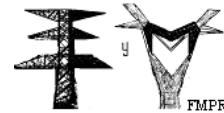
Segmento de conductor recto.

De la última integral se observa que μ_0 y 4π son constantes y las magnitudes restantes son variables por lo que es necesario expresar dos de ellas en función de la tercera.

$$d\ell = dx$$

$$\frac{x}{a} = \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha \rightarrow x = -a \cot \alpha$$

$$\frac{r}{a} = \csc(\pi - \alpha) = \csc \alpha \rightarrow r = a \csc \alpha$$



Segmento de conductor recto.

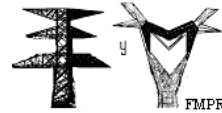
Diferenciando x.

$$dx = -a(-\csc^2 \alpha)d\alpha = a \cdot \csc^2 \alpha \cdot d\alpha$$

Sustituyendo

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{a \csc^2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot d\alpha}{a^2 \cdot \csc^2 \alpha}$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \operatorname{sen} \alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \left| -\cos \alpha \right|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$



Segmento de conductor recto.

Finalmente

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

Si la distancia “a” es mucho menor que la longitud del segmento de conductor y que el punto se encuentra cerca de la mediatriz (en el tercio central), es decir, que se cumple que

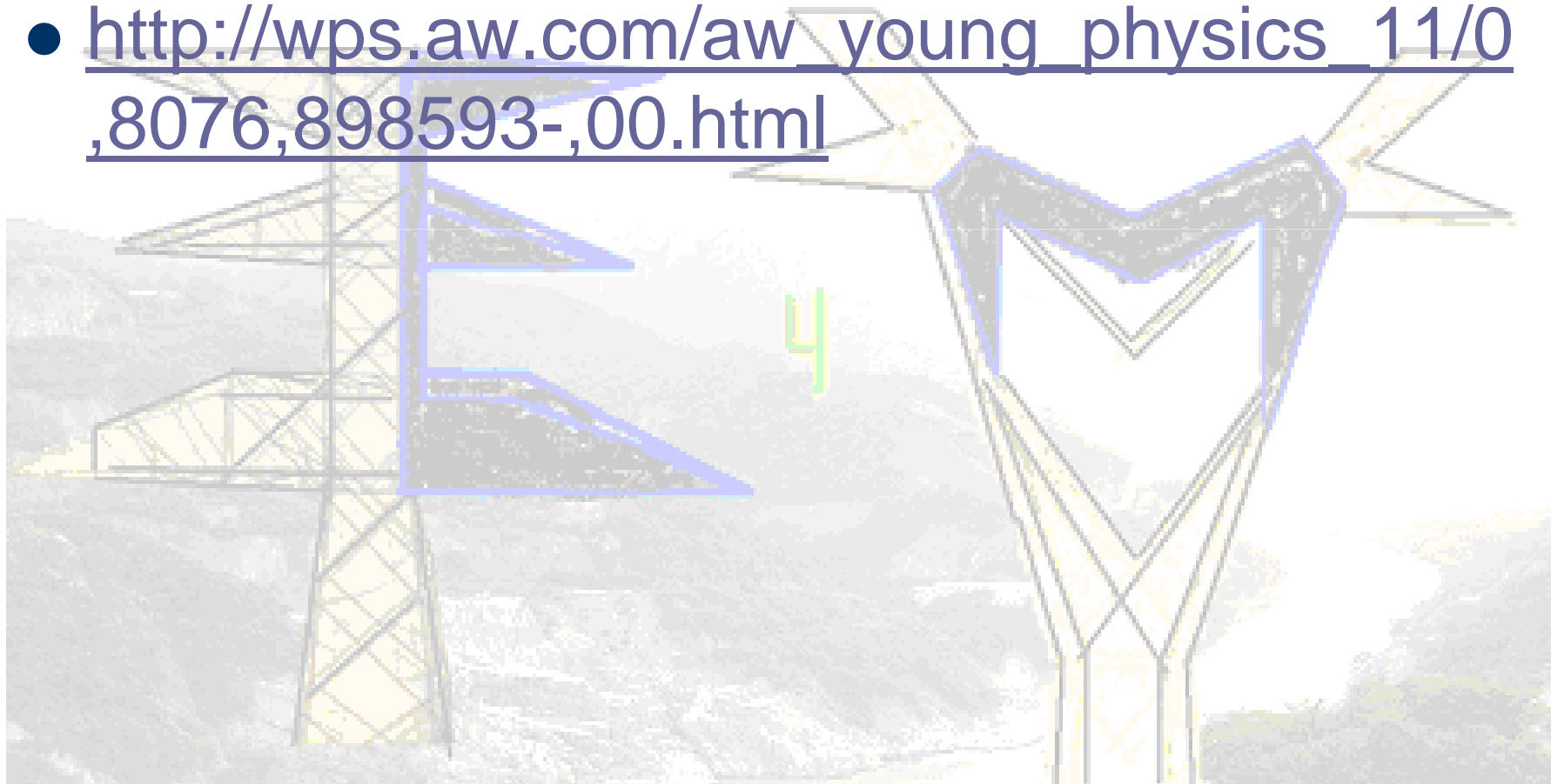
$l \geq 10 a$, entonces: $\cos \alpha_1 \approx 1$ $\cos \alpha_2 \approx -1$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a} = \frac{\mu_0 \cdot 2I}{4 \cdot \pi \cdot a} \text{ [T]}$$



Simulador

- http://wps.aw.com/aw_young_physics_11/0_8076,898593-,00.html

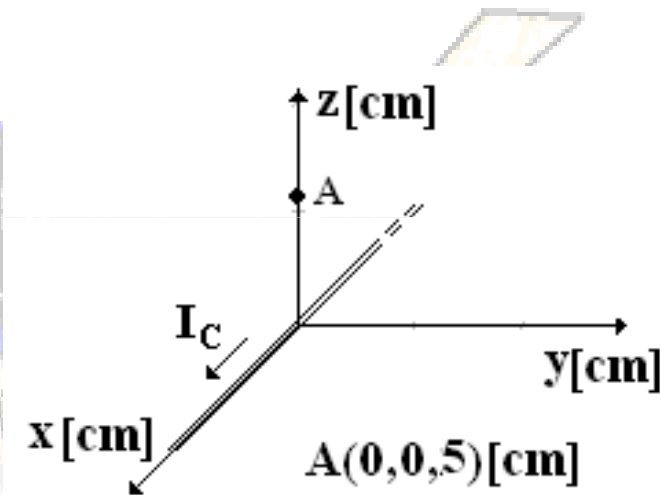




Ejemplo



En la figura se muestra un conductor recto largo coincidente con el eje “x” por el cual fluye una corriente de 20 [A] como se indica en la figura. Determine el vector campo magnético, en [μT], en el punto A (0,0,5) [cm].





En el punto A (0,0,5) [cm]

$$\vec{B}_{AC} = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi a_1} (-\hat{j}) = \frac{4\pi \times 10^{-7} (20)}{2\pi (0.05)} (-\hat{j}) = \frac{8 \times 10^{-6}}{0.1} (-\hat{j}) = -80\hat{j} [\mu\text{T}]$$

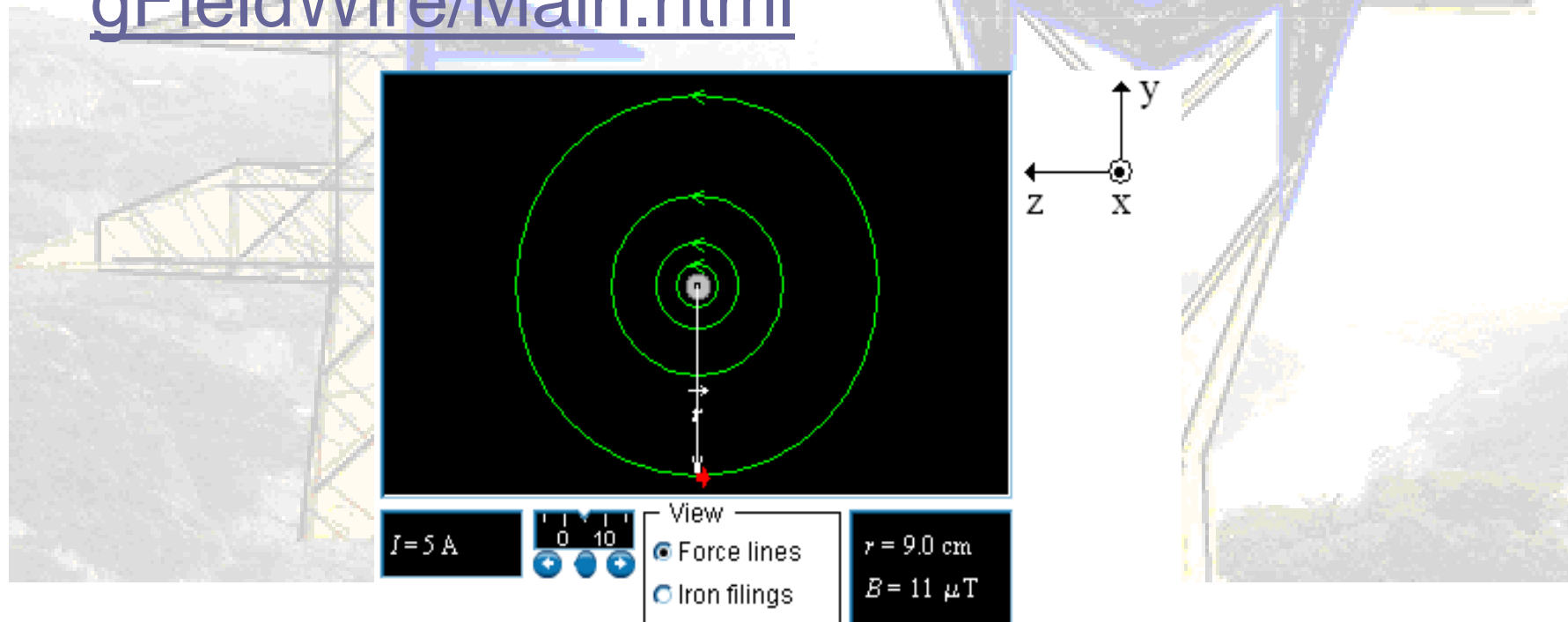
En el punto B (0,0,-5) [cm]

$$\vec{B}_{BC} = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi a_2} \hat{j} = \frac{4\pi \times 10^{-7} (20)}{2\pi (0.05)} \hat{j} = \frac{8 \times 10^{-6}}{0.1} \hat{j} = 80\hat{j} [\mu\text{T}]$$



Campo magnético

http://media.pearsoncmg.com/bc/aw_young_physics_11/pt2a/Media/Magnetism/1301MagFieldWire/Main.html



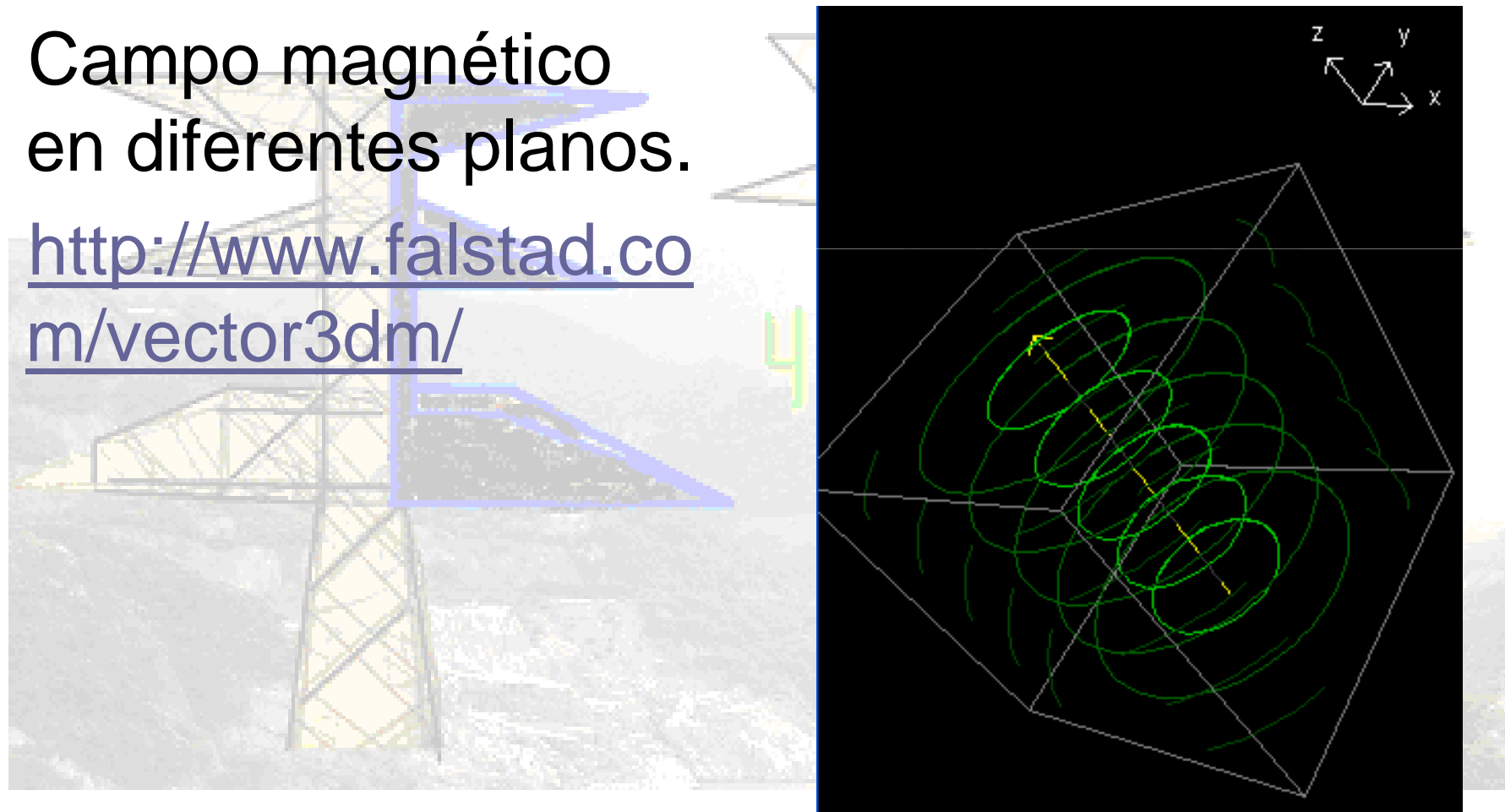


Campo magnético de un conductor.



Campo magnético
en diferentes planos.

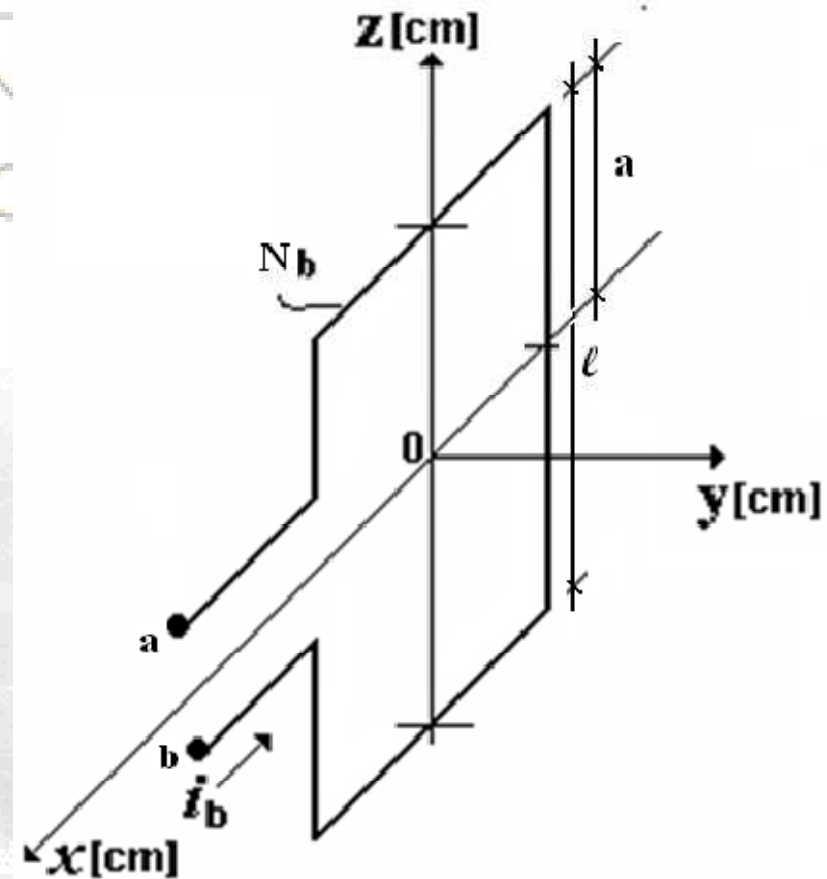
<http://www.falstad.com/vector3dm/>





Espira cuadrada.

En la figura se muestra una espira cuadrada en el plano "XZ". El campo magnético en el punto 0 es coincidente con el eje "y" en dirección. La magnitud se determina utilizando los resultados para el segmento de conductor recto.





Espira cuadrada.

- Cada lado de la espira se puede considerar como un segmento de conductor recto que produce una componente de campo magnético en el punto de interés, aplicando el principio de superposición la suma de dichos componentes nos dará el campo magnético buscado.



Espira cuadrada.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

Se puede demostrar que

$$(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \sqrt{2}$$



Espira cuadrada.

Sustituyendo

$$B = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a}$$

Sustituyendo $a=(l/2)$

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l}$$



Espira cuadrada.

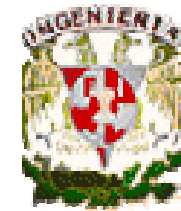
El campo total es:

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$$

Donde:

l es la distancia del lado de la espira

I es la corriente que fluye por la espira.



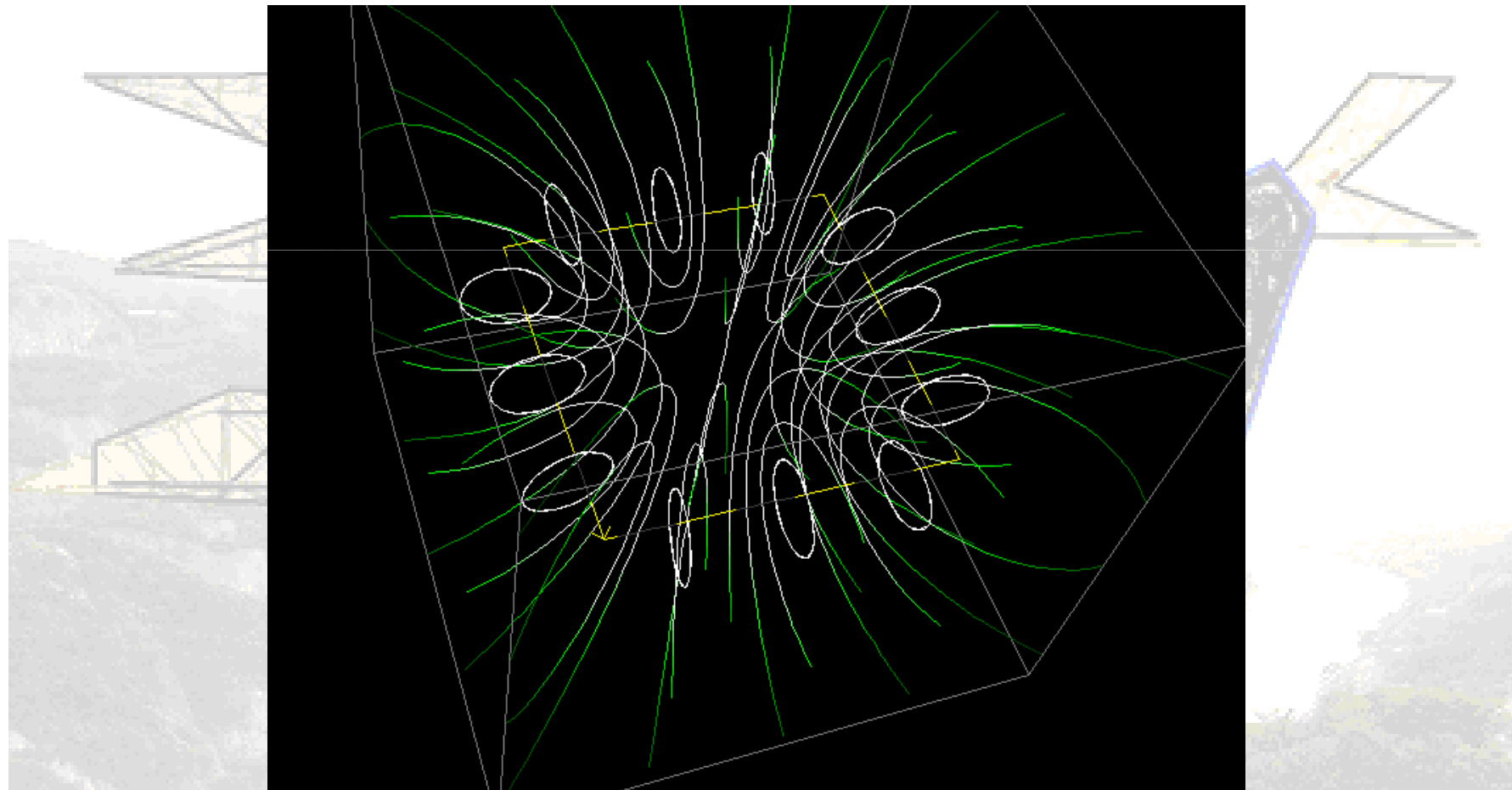
Espira cuadrada.

Vectorialmente el campo magnético en el punto 0, de acuerdo con el sistema de referencia utilizado, es:

$$\vec{B}_0 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 i_b}{\pi L} \hat{j} [\text{T}]$$

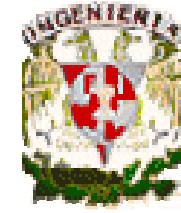


Campo magnético de una espira cuadrada



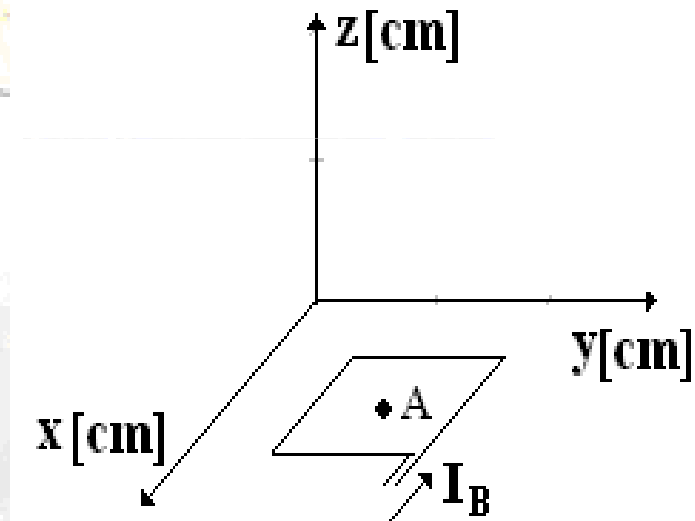


Campo magnético producido por la corriente que fluye por una espira cuadrada.



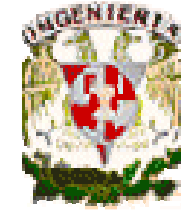
En la figura se muestra una espira cuadrada de lado $L=4[\text{cm}]$, ubicada en el plano “xy”, centrada en el punto $A(4, 4, 0) [\text{cm}]$. Determine:

El vector campo magnético, en $[\mu\text{T}]$, en el centro de la bobina, punto A, cuando la corriente en la bobina es $I_B=6 [\text{A}]$.





Campo magnético producido por la corriente que fluye por una espira cuadrada.

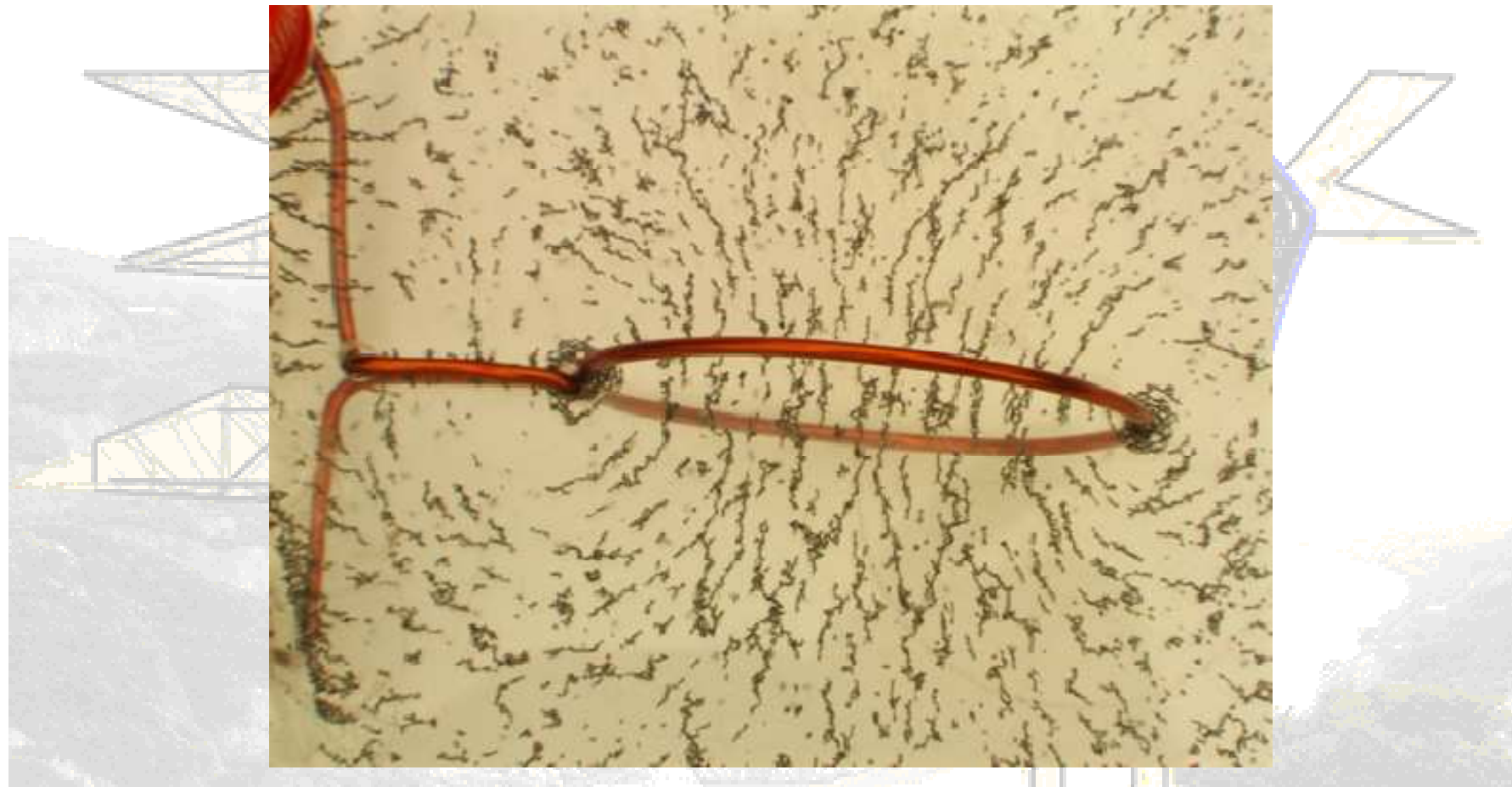


Vector campo magnético en el punto A, centro de la espira cuadrada.

$$\vec{B}_A = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I_B}{\pi\ell} \hat{k} [\text{T}] = \frac{2\sqrt{2}(4\pi \times 10^{-7})(6)}{\pi(0.04)} \hat{k} = \frac{6.79 \times 10^{-6}}{0.04} \hat{k} = 169.71 \hat{k} [\mu\text{T}]$$

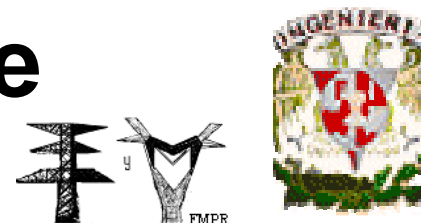


Espira en forma de circunferencia.

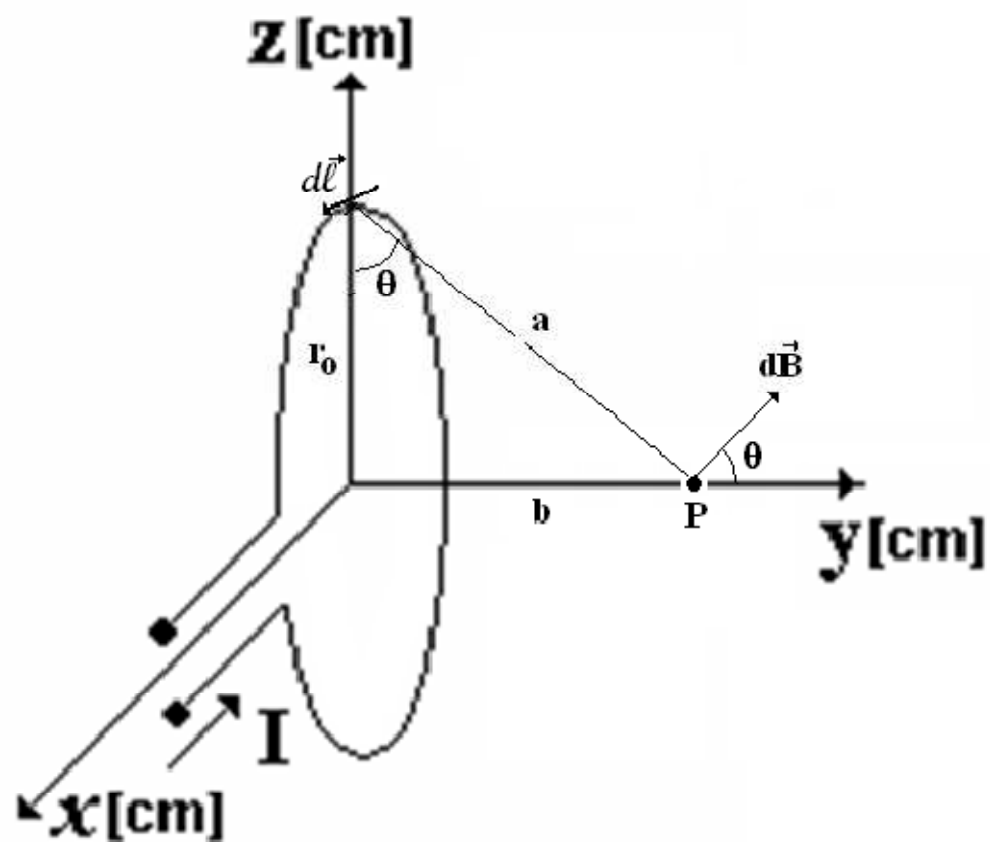




Espira en forma de circunferencia.



En la figura se muestra una espira en forma de circunferencia en el plano "XZ". El campo sobre el eje de la espira se determina por:





Espira en forma de circunferencia.



- Como se ve en la figura el campo magnético generado por un elemento $d\ell$ en particular yace en el plano “yz”, además:

$$a^2 = b^2 + r_0^2$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\ell}{(b^2 + r_0^2)}$$



Espira en forma de circunferencia.



- La situación presenta simetría de rotación en torno al eje “y” de tal manera que solo hay componentes sobre este eje, dado por:

$$dB_y = dB \cos \theta$$
$$dB_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{(b^2 + r_o^2)^{3/2}}$$



Espira en forma de circunferencia.



$$B_y = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_0 d\ell}{(b^2 + r_0^2)^{3/2}}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_0}{(b^2 + r_0^2)^{3/2}} \int d\ell$$



Espira en forma de circunferencia.



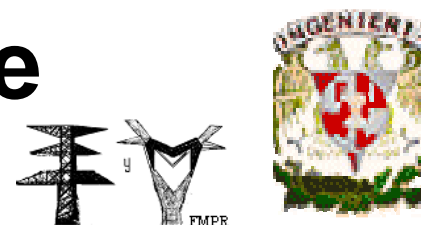
- La integral dl es simplemente la circunferencia del círculo

$$\int dl = 2\pi r_0$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r_0^2}{2 (r_0^2 + b^2)^{3/2}} \hat{j} \text{ [T]}$$



Espira en forma de circunferencia .



Si el campo se desea determinar en el centro
De la espira, se tendrá

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2r_0} \hat{j} \text{ [T]}$$

Donde:

r_0 es el radio de la espira.



Espira en forma de circunferencia.

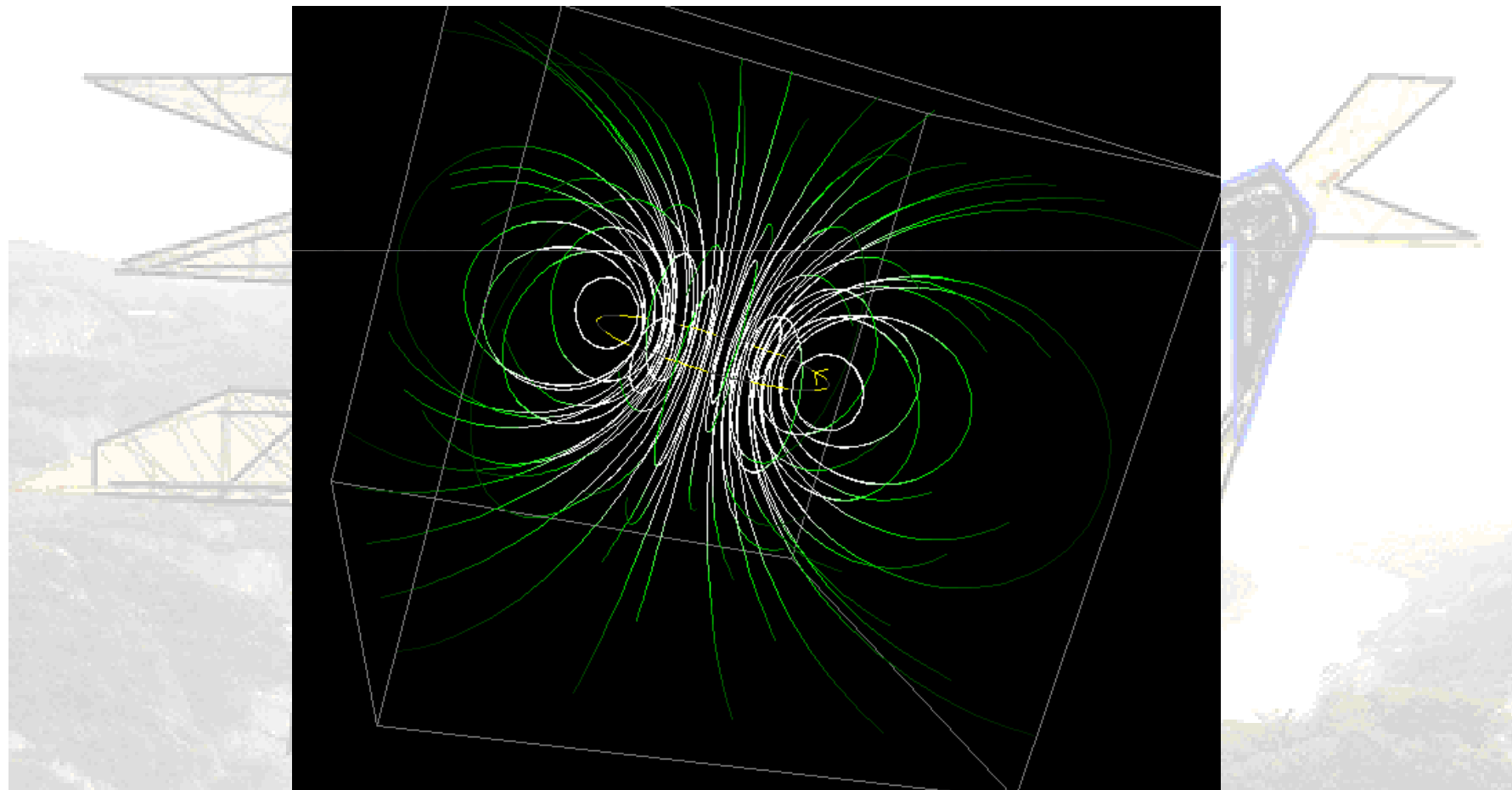


- a) Determinar el campo magnético producido por una corriente de 10 [A] , al circular por una espira de radio de 5 [cm] coincidente con el plano “xz”, en el punto $P(0,20,0) \text{ [cm]}$ situado sobre el eje de la espira.
- b) ¿Cuál es campo en el origen producido por la espira anterior?

- a) $1.793 \times 10^{-6} \text{ j [T]}$ y b) $1.257 \times 10^{-4} \text{ j [T]}$



Campo magnético de una espira en forma de circunferencia.



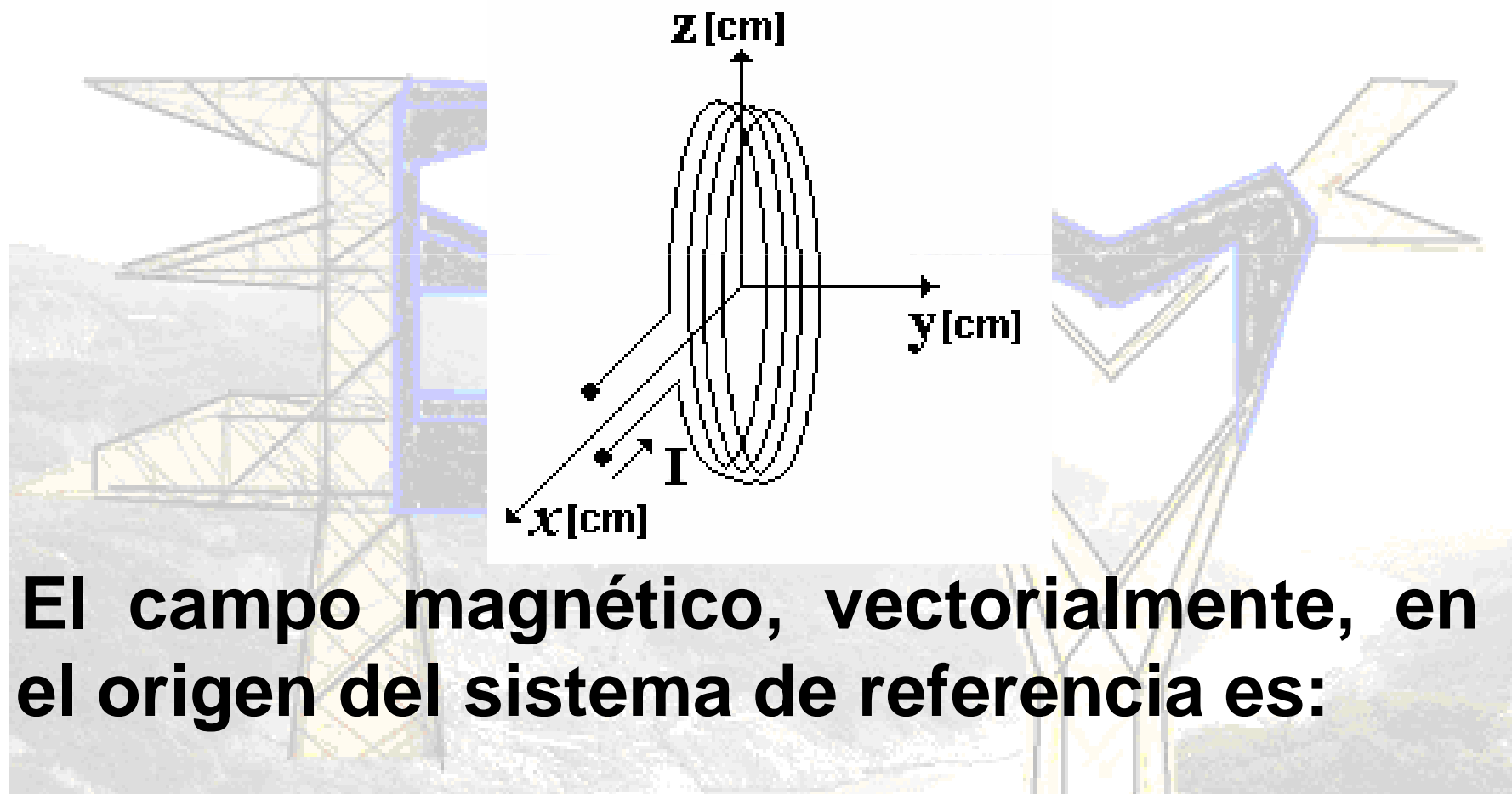


Bobina.

La bobina es un dispositivo de alto interés práctico, ya que rara vez se utiliza una sola espira para producir el campo magnético. Una bobina es un conjunto de espiras formadas por un conductor, necesariamente con un aislamiento en su superficie cuyo espesor es mucho menor que su radio medio.



Bobina.



El campo magnético, vectorialmente, en el origen del sistema de referencia es:



Bobina.

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I r_m^2 N}{2(r_m^2 + b_m^2)^{3/2}} \hat{j} [T]$$

Donde:

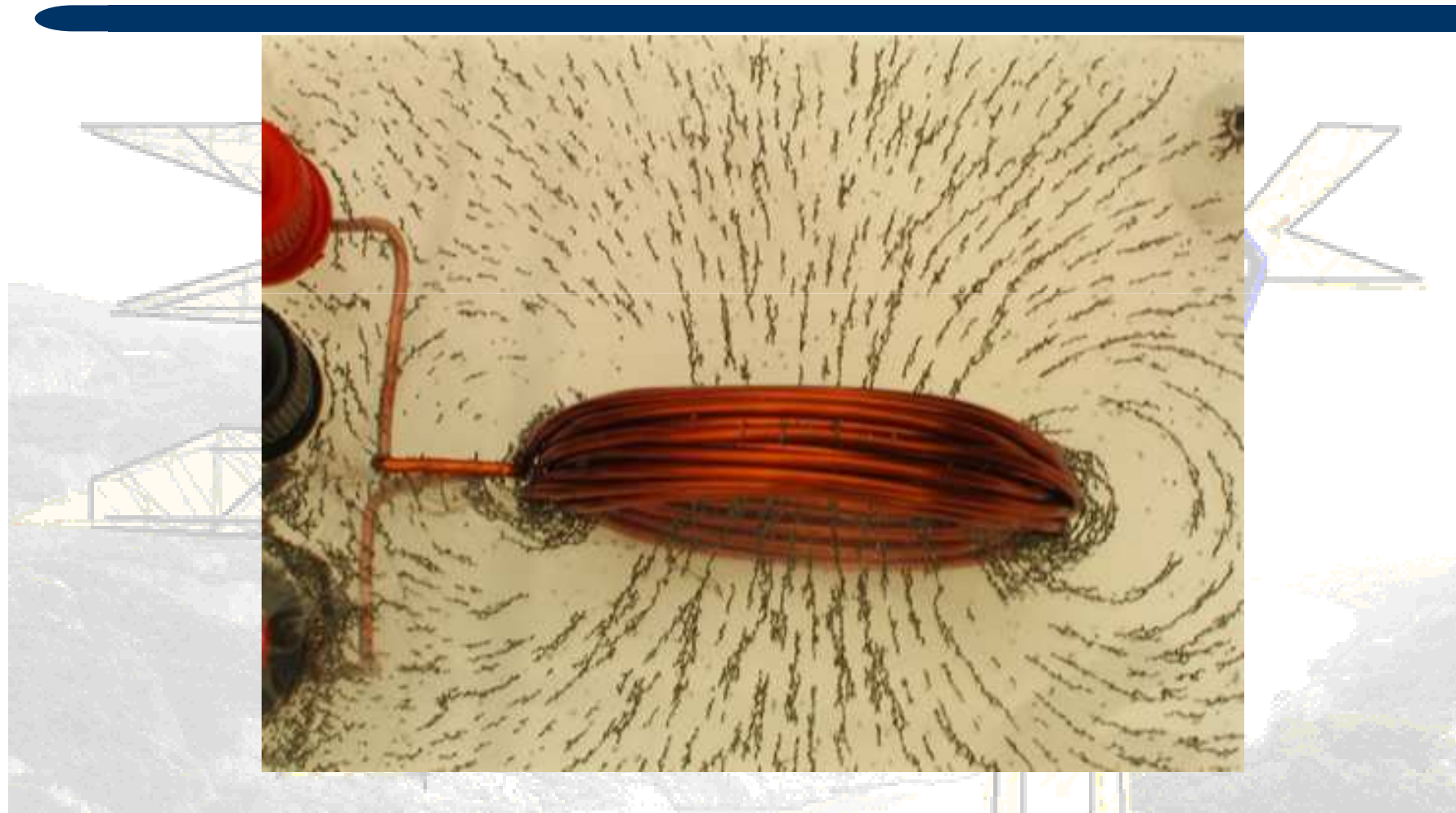
r_m es el radio medio de la bobina.

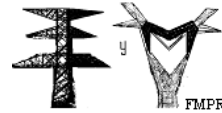
b_m es el valor medio del espesor.

N es el número de vueltas



Campo magnético producido por una bobina.





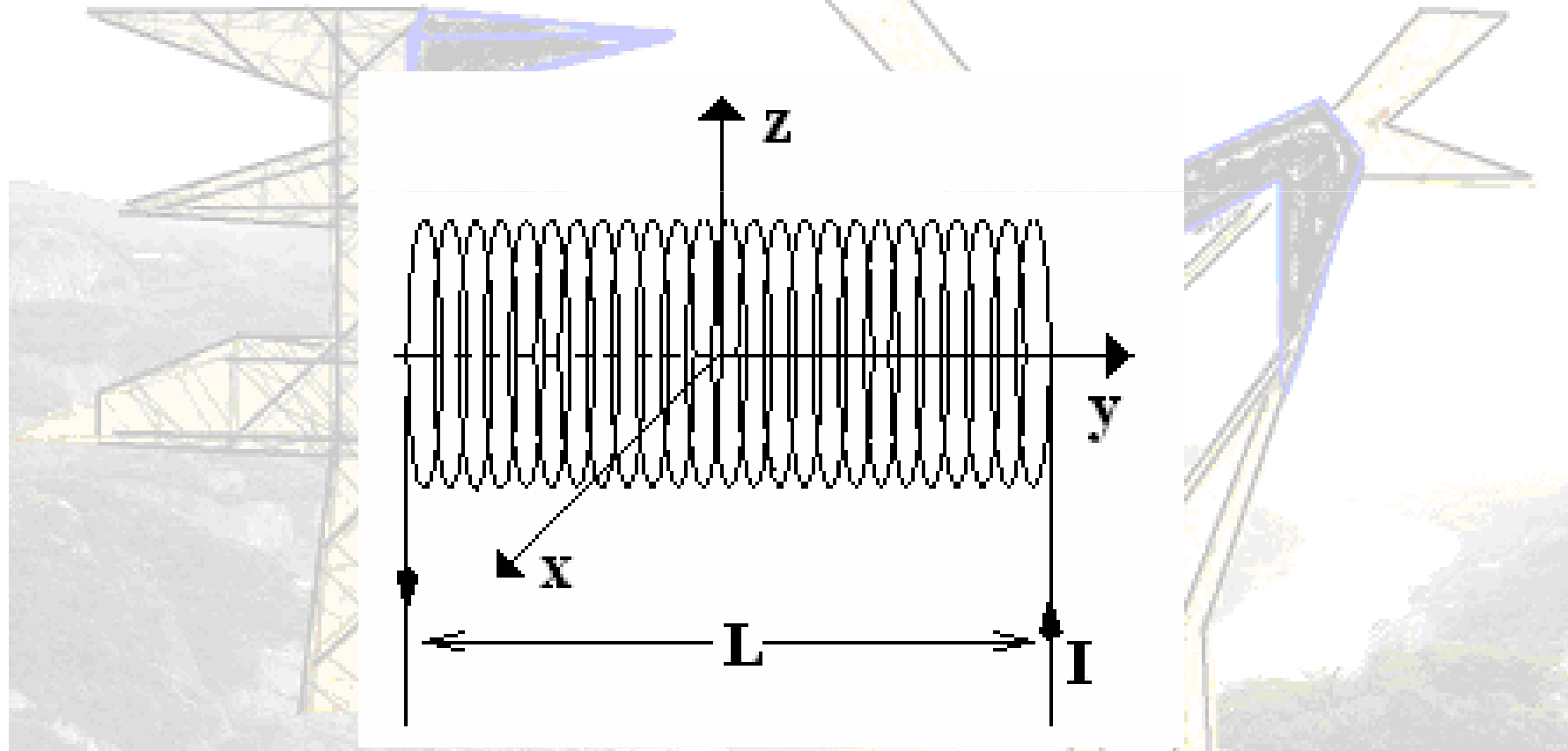
Solenoides.

El solenoide es un elemento constituido por un enrollamiento de alambre esmaltado en forma helicoidal sobre un núcleo, donde se cumple que el espesor o largo del solenoide es mucho mayor que el radio de las espiras. A medida que las espiras se encuentren más cercanas el campo magnético será más intenso en el centro de la espira y en el centro de la longitud del solenoide.



Solenoides.

Solenoides del laboratorio.





Solenoides.

El campo magnético en el origen del sistema de referencia, que se encuentra en la parte media del solenoide es, de forma vectorial:

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I N}{L} \hat{j} [T]$$

Donde:

L es el largo del solenoide.

N es el número de vueltas.



Solenoides.

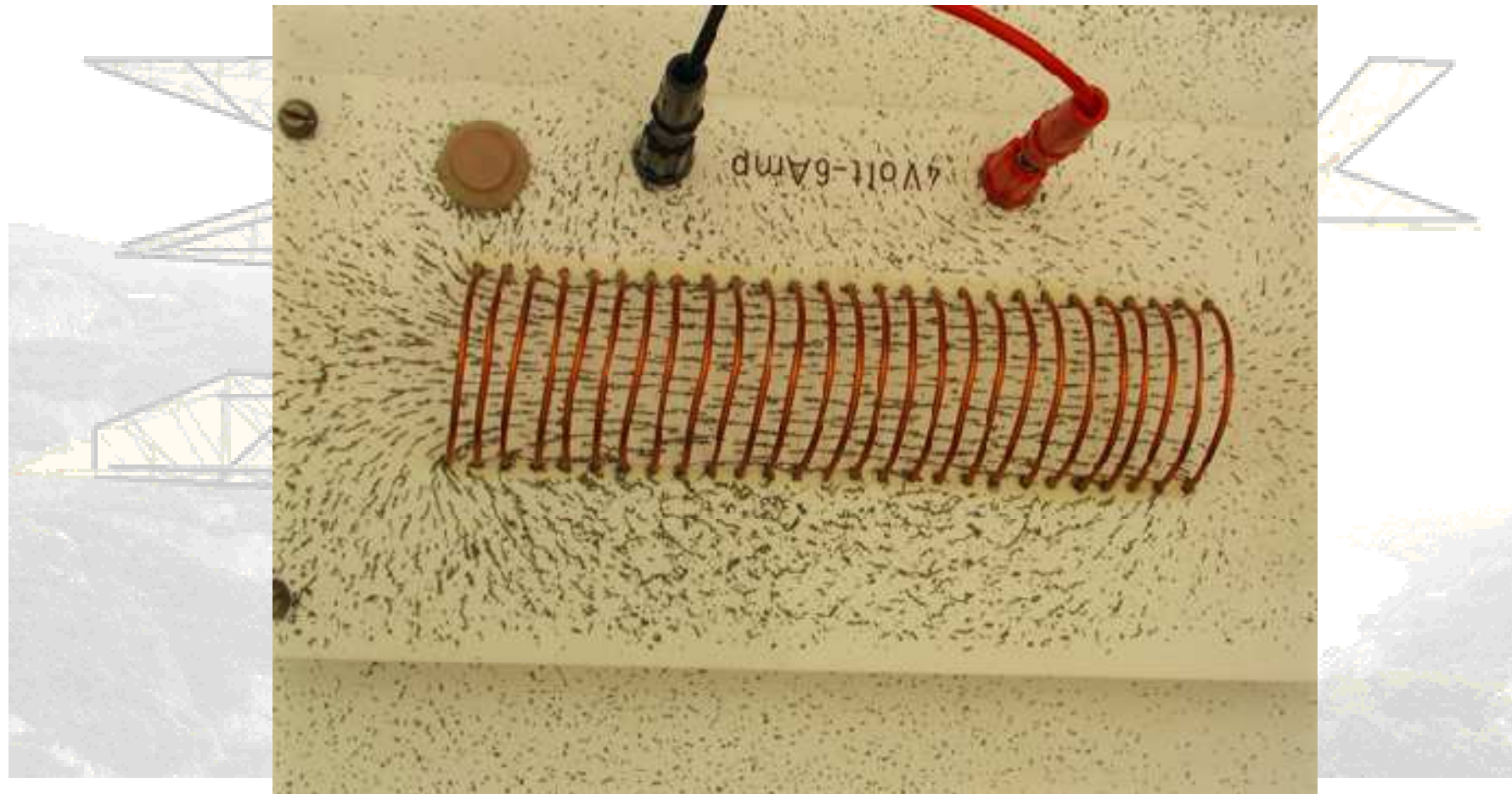
Experimentalmente se ha determinado que el campo magnético en los extremos del solenoide es la mitad del campo en el centro del mismo. Por lo tanto:

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I N}{2L} \hat{j} \text{ [T]}$$

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnetismo/magnetico/cMagnetico.html>

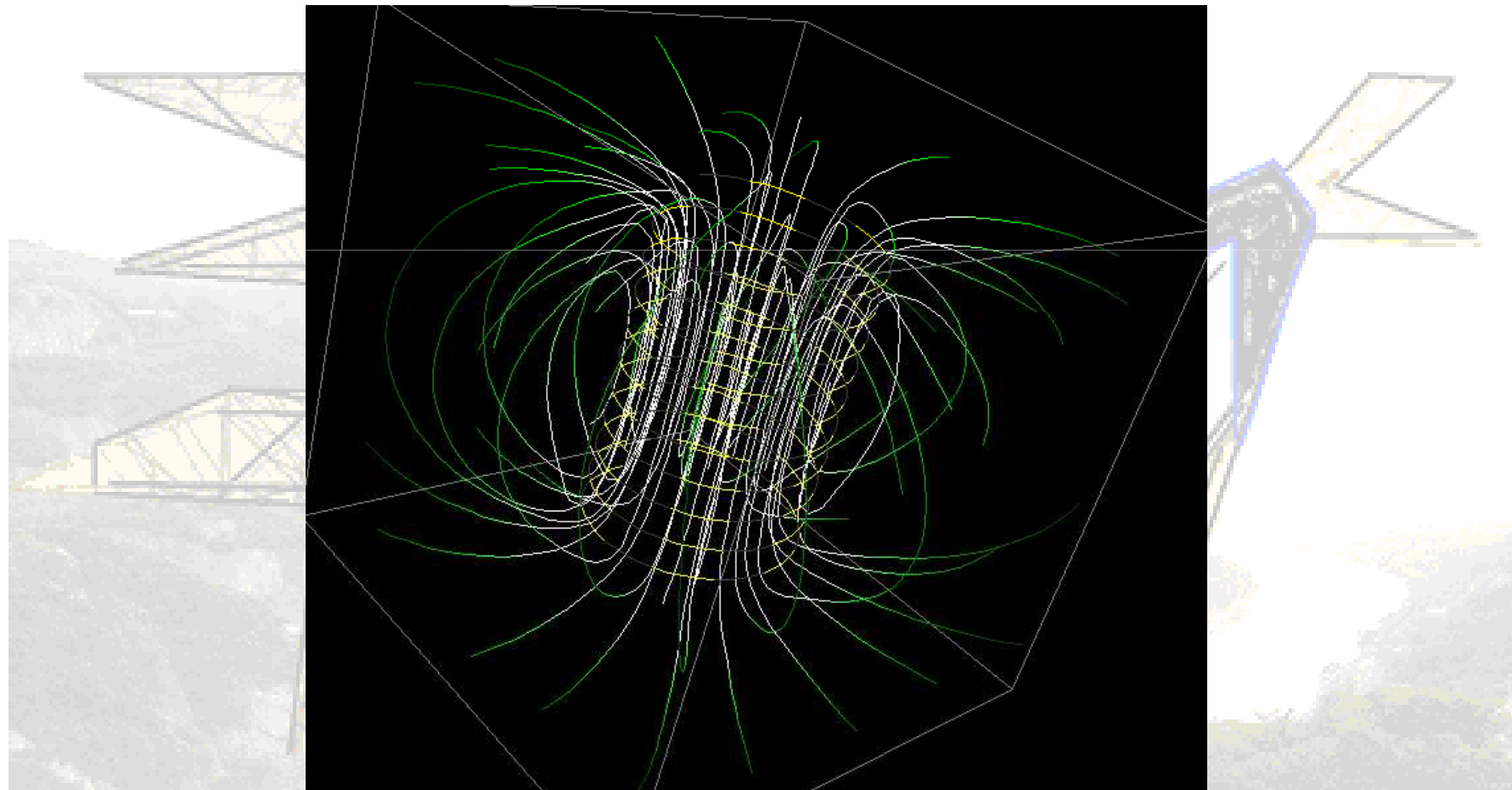


Solenoid.





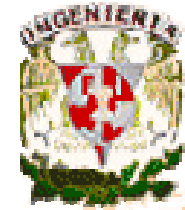
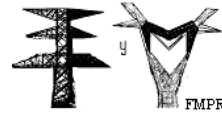
Campo magnético de un solenoide.





Ley de Ampere.

La ley de Ampere, implica la descripción básica de la relación existente entre la electricidad y el magnetismo, desarrollada a través de afirmaciones cuantitativas sobre la relación de un campo magnético con la corriente eléctrica o las variaciones de los campos eléctricos.



Ley de Ampere.

- **André-Marie Ampère**
(Poleymieux-au-Mont-d'Or,
20 de enero de 1775 - †
Marsella, 10 de junio de
1836), fue un
matemático y físico
francés, considerado
como uno de los
descubridores del
electromagnetismo.





Ley de Ampere.

Se trata de una ley que general: la circulación del campo magnético a lo largo de una trayectoria, resulta igual a mu cero veces la corriente que cruza el área limitada por la trayectoria de interés.

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I_N$$



Ley de Ampere.

La ley de Ampere permite determinar los campos magnéticos producidos por corrientes eléctricas que fluyen por conductores. Aunque es una ley de validez general, para campos magnéticos estáticos, su aplicación a casos prácticos se restringe a los que por sus características de simetría permiten elegir una trayectoria de integración por medio de la cual se evalúa con facilidad la integral correspondiente.



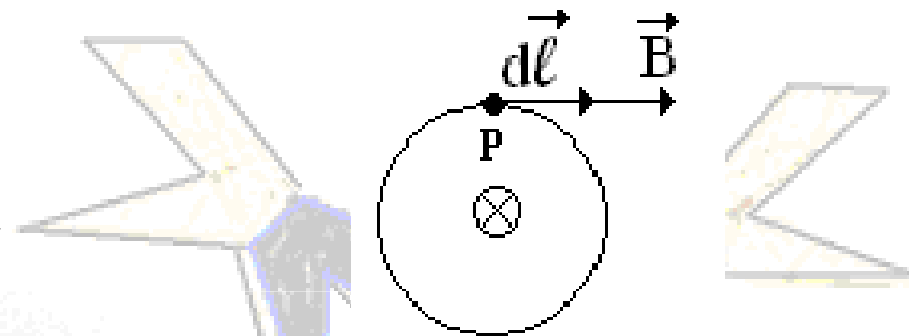
Ley de Ampere.

- **Al utilizar la ley de Ampere, por ejemplo, para determinar el campo magnético producido por un conductor recto se llega al mismo resultado obtenido por medio de la ley de Biot-Savart.**



Ley de Ampere.

- En la figura se muestra un conductor recto y largo por el cual circula una corriente que entra al plano de la hoja. El campo magnético en el punto P es:



$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\ell} B \cos \alpha \, d\ell = \mu_0 I$$

$$B \oint_{\ell} d\ell = \mu_0 I$$

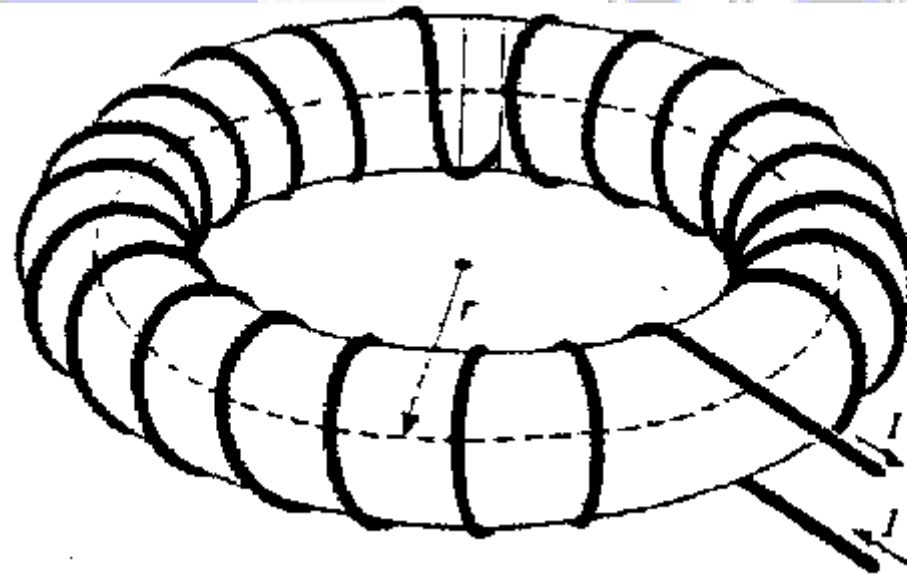
$$B(2\pi \cdot r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} [T]$$



Toroide

- Un toroide se puede formar si se unen cara a cara los extremos de un solenoide, como se muestra en la figura:





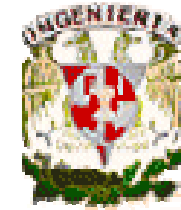
Toroide

- En las fuentes conmutadas que usan las computadoras se incluyen toroides:

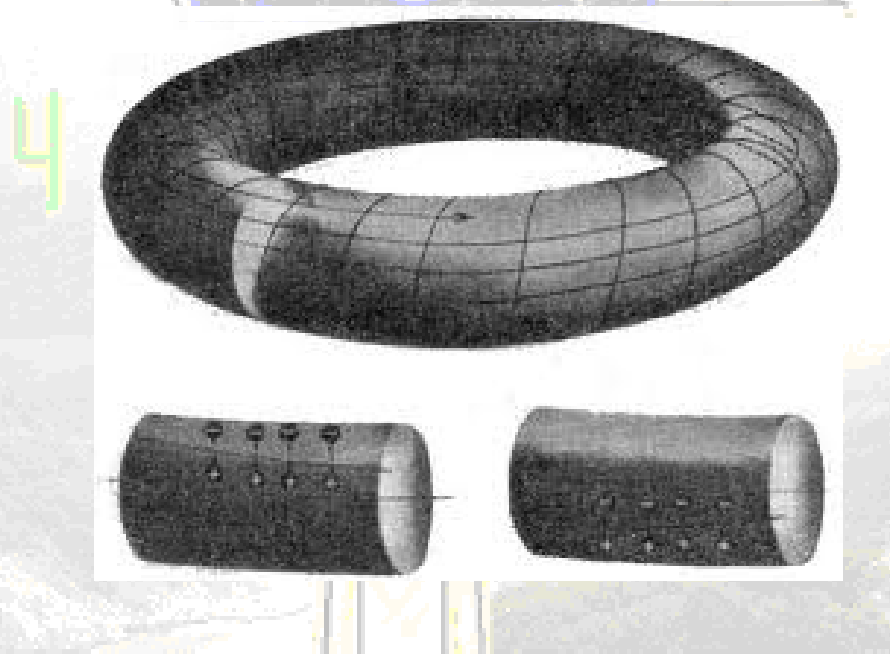
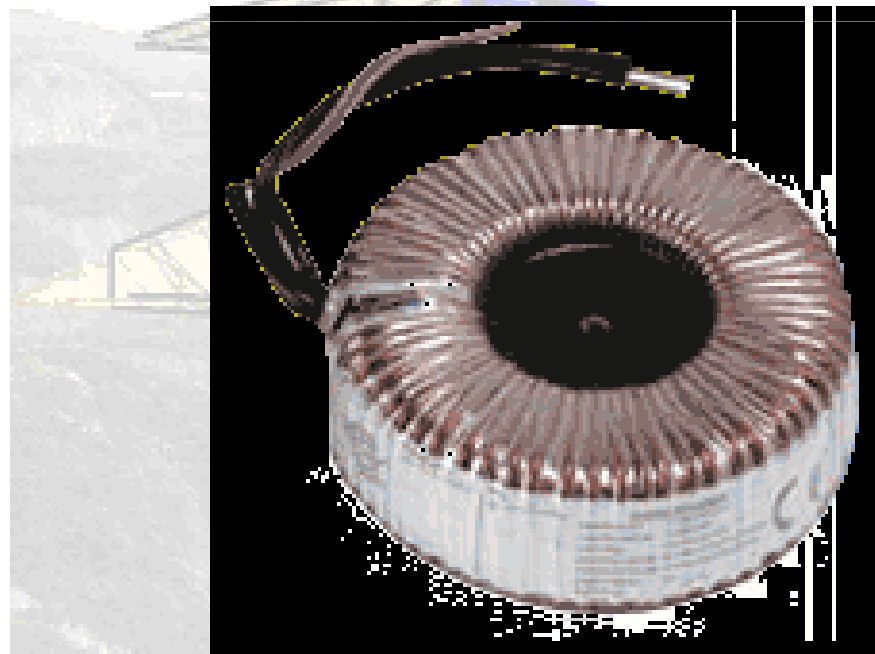




Toroide se sección transversal cuadrada

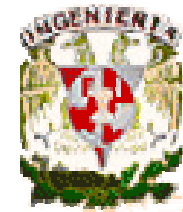


- Existen toroides de sección transversal cuadrada





Toroide se sección transversal cuadrada



- Aplicando la ley de Ampere debido a la simetría de esta forma de enrollamiento, se tiene:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B d\ell \cos \alpha_1 = B \oint d\ell = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

Como la corriente concatenada por la trayectoria de integración es igual a N veces I

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}; \quad r_i < r < r_e$$

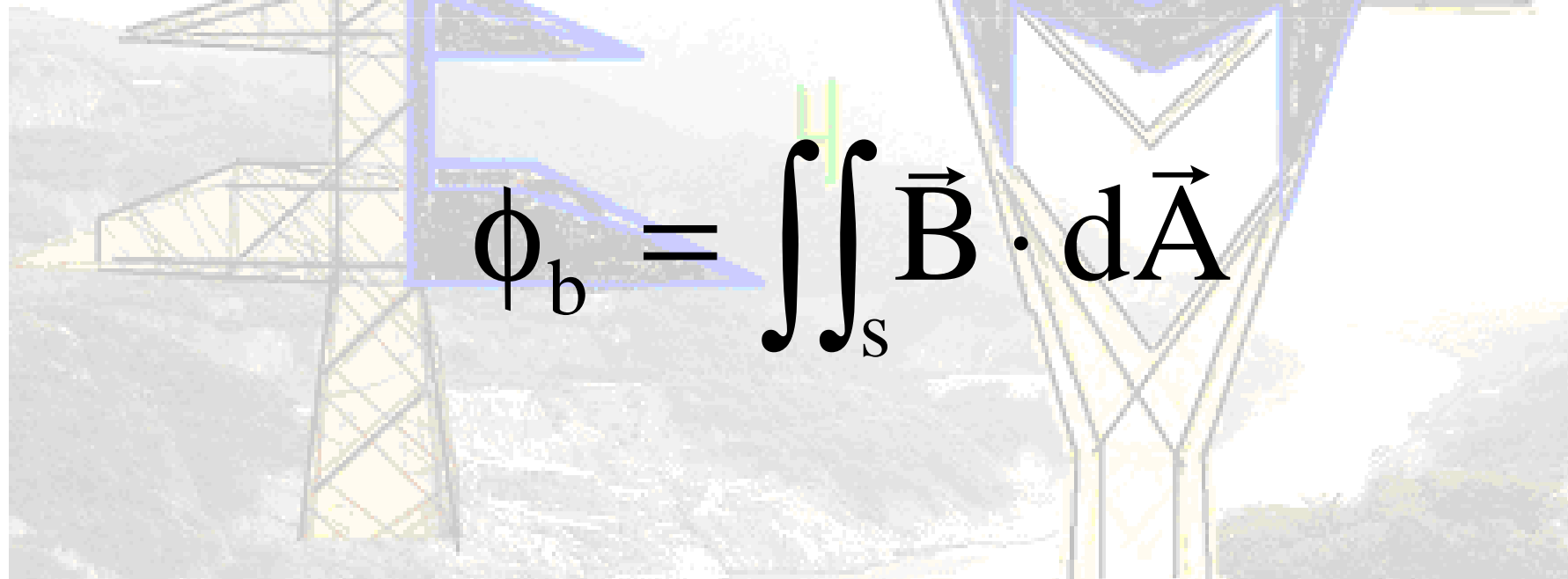


Flujo de la inducción magnética.



En diversos problemas se requiere evaluar el flujo de la inducción magnética a través de un área determinada.

$$\phi_b = \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

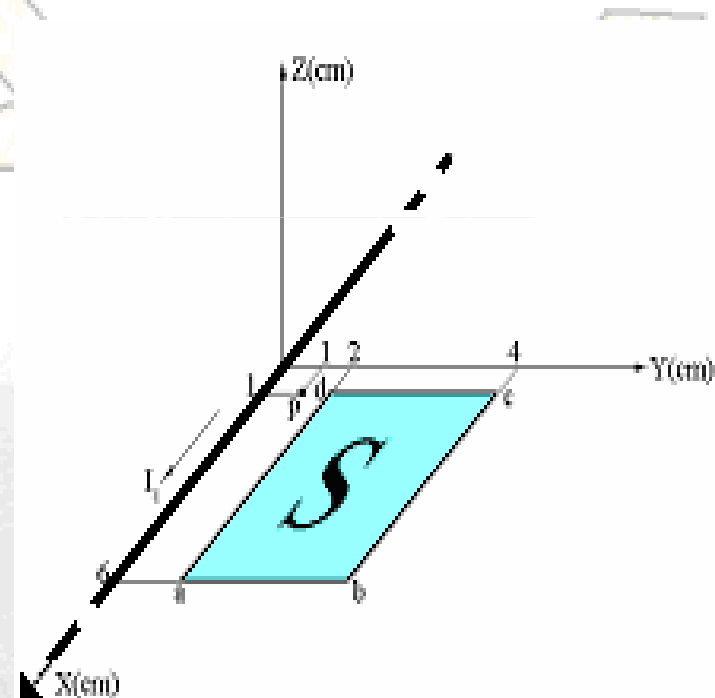




Flujo debido a un conductor recto y largo.



Consideremos la siguiente figura, donde un conductor coincidente con el eje de las “x’s” produce un campo magnético debido a la corriente que fluye por él.





Flujo debido a un conductor recto y largo.



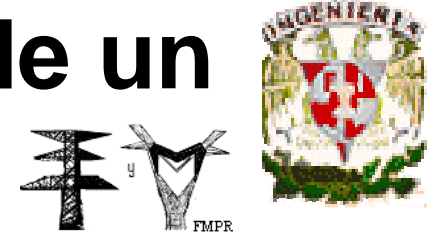
El flujo magnético es:

$$\phi_b = \iint_s B dA \cos \alpha = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \int_d^c \frac{dr}{r}$$

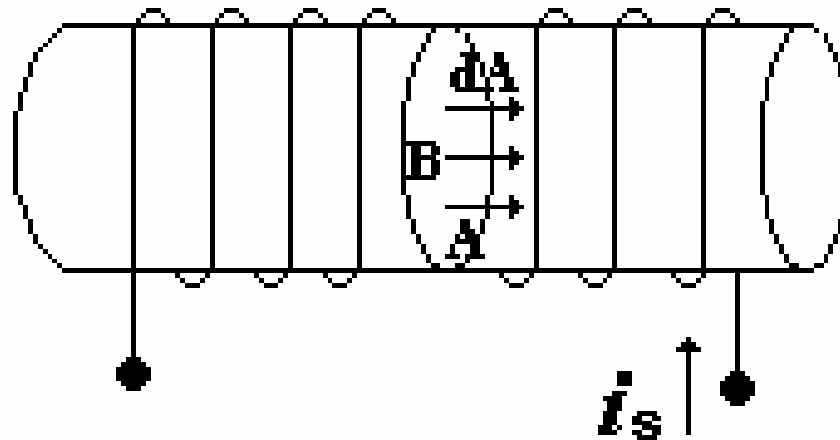
$$\phi_b = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln \frac{d + c}{d} \text{ [Wb]}$$



Flujo en una sección de un solenoide largo.



En la figura se muestra una sección transversal localizada en la zona central de un solenoide, al evaluar el flujo tendremos:



$$\phi_b = \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_s B dA \cos \theta = \iint_s B dA$$



Flujo en una sección de un solenoide largo.



Como el campo magnético no varía ni en magnitud ni en sentido

$$\phi_b = B \iint_s dA = B A \text{ [Wb]}$$



Flujo a través de la sección transversal de un toroide.



- El flujo a través de la sección transversal de un toroide es:

$$\phi_b = \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_s B dA = \int_{r_i}^{r_e} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} (e) dr$$

$$\phi_b = \frac{\mu_0 N I e}{2\pi r} \int_{r_i}^{r_e} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N I e}{2\pi r} \ln r \Big|_{r_i}^{r_e}$$

$$\phi_b = \frac{\mu_0 N I e}{2\pi r} \ln \frac{r_e}{r_i} [\text{Wb}]$$



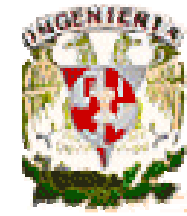
Ley de Gauss para el magnetismo.



Cuando se evalúa el flujo sobre una superficie cerrada se obtiene el siguiente resultado:

$$\oiint_s \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Lo cual nos indica que el flujo neto a través de una superficie cerrada (gaussiana), colocada en un campo magnético es cero. Expresión completamente general.



Bibliografía.

Gabriel A. Jaramillo Morales, Alfonso A.
Alvarado Castellanos.
Electricidad y magnetismo.
Ed. Trillas. México 2003

Sears, Zemansky, Young, Freedman
Física Universitaria
Ed. PEARSON. México 2005